УДК 514.75

А. А. Будылкин

ИНВАРИАНТНЫЕ НОРМАЛИЗАЦИИ И ОСНАЩЕНИЯ Э. КАРТАНА ОСНОВНЫХ СТРУКТУРНЫХ ПОДРАССЛОЕНИЙ *SH*-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Приведены задание SH-распределения, теорема существования в репере нулевого порядка. Получены инвариантные нормализации, соответствия Бомпьяни – Пантази, построены оснащения в смысле Э. Картана основных структурных подрасслоений.

SH-distribution and the theorem of the existence in frame of order zero are given. Invariant normalizations, matchings Bompiani-Pantazi and equipments in order of E. Cartan of major structural sub-bundles are built.

Ключевые слова: распределения, тензор, квазитензор, нормализация.

Key words: distribution, tensor, kvazitensor, normalization.

Изучение *SH*-распределений актуально, так как эти образы являются обобщениями теории специальных классов гиперполос и гиперповерхностей [8], а также гиперполосных распределений [9], которая имеет приложение в вариационном анализе, физике, механике [2; 3; 10].

Работа выполнена методом Г. Ф. Лаптева.

Знак $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^K. Индексы:

$$i, j, k, \ldots = \overline{1, m};\ \alpha, \beta, \ldots = \overline{m+1, n-m-1};$$
$$\sigma, \rho, \ldots = \overline{1, n-1};\ I, J, K, \ldots = \overline{1, n};\ \bar{I}, \bar{J}, \bar{K}, \ldots = \overline{0, n}.$$

§ 1. Задание скомпонованного SH-распределения проективного пространства. Теорема существования

Определение 1. Тройка распределений плоскостей Λ-, L-, *H*-проективного пространства P_n, удовлетворяющая условиям

$$[L_{n-m-1}(A), \Lambda_m(A)] = H_{n-1}(A),\ L_{n-m-1}(A) \cap \Lambda_m(A) = \mathrm{A},$$

называется *скомпонованным гиперплоскостным распределением, или коротко SH-распределением* [7].

Выберем подвижной репер пространства $R_0 = \{A_{\bar{J}}\}$ (0-го порядка), ассоциированный с *SH*-распределением

$$A \equiv A_0,\ \{A_i\} \subset \Lambda(A_0),\ \{A_\alpha\} \subset L(A_0),\ A_n \notin H_{n\text{-}1}(A_0).$$

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. № 2. С. 41 – 50.

SH-распределение в этом репере R_0 задается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega^K, \ \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha K}^n \omega^K, \ \omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega^K, \ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega^K, \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\nabla\Lambda_{iK}^n + \Lambda_{iK}^n \omega_0^0 - \delta_K^n \omega_i^0 = \Lambda_{iKL}^n \omega^L, \ \nabla\Lambda_{\alpha K}^n + \Lambda_{\alpha K}^n \omega_0^0 - \delta_K^n \omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha KL}^n \omega^L, \\ \nabla\Lambda_{iK}^\alpha + \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^0 - \delta_K^\alpha \omega_i^0 + \Lambda_{iK}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{iKL}^\alpha \omega^L, \\ \nabla\Lambda_{\alpha K}^i + \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^0 - \delta_K^i \omega_\alpha^0 + \Lambda_{\alpha K}^n \omega_n^i = \Lambda_{\alpha KL}^i \omega^L,\end{gathered} \tag{2}$$

где функции $\Lambda_{iKL}^n, \Lambda_{\alpha KL}^n, \Lambda_{iKL}^\alpha, \Lambda_{\alpha KL}^i$ не симметричны по нижним индексам K, L.

Имеет место теорема существования *SH*-распределений [1].

Теорема 1. *В n-мерном проективном пространстве скомпонованное гиперплоскостное SH-распределение в репере нулевого порядка существует с произволом* $(2m + 1)(n - m - 1) + m$ *функций n аргументов.*

§ 2. Инвариантные нормализации основных структурных подрасслоений *SH*-распределения

1. Из уравнений (2) следует, что совокупности функций $\{\Lambda_{ij}^n\}$, $\{\Lambda_{\alpha\beta}^n\}$, $\{\Lambda_{\sigma\rho}^n\} = \{\Lambda_{ij}^n, \Lambda_{\alpha\beta}^n\}$ образуют в силу строения *SH*-распределения невырожденные фундаментальные тензоры 1-го порядка соответственно Λ-, *L*-, *H*-подрасслоений:

$$\nabla\Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n \omega_0^0 = \Lambda_{ijL}^n \omega^L, \ \ \nabla\Lambda_{\alpha\beta}^n + \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_0^0 = \Lambda_{\alpha\beta L}^n \omega^L, \ \ \nabla\Lambda_{\sigma\rho}^n + \Lambda_{\sigma\rho}^n \omega_0^0 = \Lambda_{\sigma\rho L}^n \omega^L, \tag{3}$$

для которых можно ввести обращенные фундаментальные тензоры 1-го порядка, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered}\Lambda_{ij}^n \Lambda_n^{jk} = \delta_i^k, \ \Lambda_{ij}^n \Lambda_n^{ki} = \delta_j^k, \ \nabla\Lambda_n^{jk} - \Lambda_n^{jk}\omega_0^0 \equiv 0, \\ \Lambda_{\alpha\beta}^n \Lambda_n^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma, \ \Lambda_{\alpha\beta}^n \Lambda_n^{\gamma\alpha} = \delta_\beta^\gamma, \ \nabla\Lambda_n^{\beta\gamma} - \Lambda_n^{\beta\gamma}\omega_0^0 \equiv 0, \\ \Lambda_{\sigma\rho}^n \Lambda_n^{\rho\tau} = \delta_\sigma^\tau, \ \Lambda_{\sigma\rho}^n \Lambda_n^{\tau\sigma} = \delta_\rho^\tau, \ \nabla\Lambda_n^{\rho\tau} - \Lambda_n^{\rho\tau}\omega_0^0 \equiv 0.\end{gathered}$$

2. В каждом центре A_0 нормаль 1-го рода $N_{n-m}(A_0)$ образующего элемента Λ-подрасслоения определим следующим образом:

$$N_{n-m}(A_0) = [L_{n-m-1}(A_0), L_n], \ L_n = A_n + \nu_n^i A_i + \nu_n^\alpha A_\alpha.$$

Требование инвариантности плоскости $N_{n-m}(A_0)$ ведет к уравнениям

$$\nabla\nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nK}^i \omega^K, \tag{4}$$

а на величины $\{\nu_n^\alpha\}$ это требование никаких условий не накладывает. Однако если потребовать инвариантность прямой $I(\nu) = [A_0, L_n]$, то величины $\{\nu_n^\alpha\}$ должны удовлетворять условиям

$$\nabla\nu_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \nu_{nK}^\alpha \omega^K. \tag{5}$$

Охват квазитензора $\{\nu_n^\alpha\}$ (5) можно осуществить так: $\nu_n^\alpha = \mathsf{L}_n^\alpha$, где

$$\nu_n^\alpha = \Lambda_n^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m}\Lambda_{ij}^\alpha \Lambda_n^{ji},\ \nabla\Lambda_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \Lambda_{nL}^\alpha \omega^L.$$

В дальнейшем будем считать, что прямая $I(\nu) = [A_0, L_n]$ инвариантна, то есть в качестве точки L_n можно взять $\mathrm{L}_n(\nu) = \mathrm{A}_n + \nu_n^i \mathrm{A}_i + \Lambda_n^\alpha \mathrm{A}_\alpha$.

Задание поля квазитензора $\{\nu_n^i\}$ (4) определяет поле инвариантных прямых $I(\nu) = [A_0, L_n(\nu)]$, а следовательно, поле инвариантных нормалей 1-го рода $N_{n-m}(\nu) = [L_{n-m-1}(\nu), L_n(\nu)]$. Подразумевая это, мы в дальнейшем под полем инвариантных нормалей 1-го рода Λ-подрасслоения будем понимать поле соответствующего квазитензора $\{\nu_n^i\}$. В репере R_0 уравнения инвариантной нормали 1-го рода $N_{n-m}(\nu)$ запишутся в виде $x^i - \nu_n^i x^n = 0$.

Пусть нормаль 2-го рода $N_{m-1}(\nu)$ плоскости $\Lambda(A_0)$ натянута на точки $N_i = \mathrm{A}_i + \nu_i^0 \mathrm{A}_0$. Требование инвариантности нормали $N_{m-1}(\nu)$ равносильно тому, что величины $\{\nu_i^0\}$ удовлетворяют уравнениям $\nabla\nu_i^0 + \omega_i^0 = \nu_{iK}^0 \omega^K$.

3. Пусть инвариантное поле нормалей 1-го рода N_{n-m} задано полем квазитензора $\{\nu_n^i\}$. Следуя работе [5] с учетом формул (1)—(4), найдем фокальное многообразие $\Phi_{n-m-1}^m(N, \Lambda) \subset N_{n-m}(A_0)$:

$$x^i = 0,\ \det\left\|\delta_j^i x^0 + (\nu_{nj}^i - \Lambda_{ij}^n \nu_n^i \nu_n^j)x^n + (\Lambda_{\alpha j}^i - \nu_n^i \Lambda_{\alpha j}^n)x^\alpha\right\| = 0, \tag{6}$$

полученное при смещении точки A_0 вдоль кривых, принадлежащих полю Λ-плоскостей. Линейная поляра точки A_0 относительно многообразия (6) есть плоскость

$$K_{n-m-1}(\mathrm{A}_0):\ x^i = 0,\ x^0 - \eta_\alpha^0 x^\alpha - \nu_n^0 x^n = 0, \tag{7}$$

где

$$\eta_\alpha^0 = -\frac{1}{m}\left(\Lambda_{\alpha i}^i - \Lambda_{\alpha i}^n \nu_n^i\right),\ \nu_n^0 = -\frac{1}{m}\left(\nu_{ni}^i - \Lambda_{ij}^n \nu_n^i \nu_n^j\right),$$
$$\nabla\eta_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \eta_{\alpha K}^0 \omega^K,\ \nabla\nu_n^0 + \nu_n^i \omega_i^0 - \eta_\alpha^0 \omega_n^\alpha + \omega_n^0 = \nu_{nK}^0 \omega^K.$$

Плоскость $K_{n-m-1}(\mathrm{A}_0)$ (7) пересекает:

а) плоскость $L(A_0)$ по ее нормали 2-го рода $N_{n-m-2}(A_0)$:

$$x^i = 0,\ x^n = 0,\ x^0 - \eta_\alpha^0 x^\alpha = 0; \tag{8}$$

б) прямую $I(\nu) = [A_0, L_n(\nu)]$ в точке K_n:

$$K_n: x^\alpha = \Lambda_n^\alpha x^n,\ x^i = \nu_n^i x^n,\ x^0 = (\nu_n + \eta_\alpha \Lambda_n^\alpha)x^n. \tag{9}$$

4. Пусть задано поле нормалей $N_{m+1}(A_0)$ 1-го рода L-подрасслоения, то есть задано поле квазитензора $\{\nu_n^\alpha\}$. Здесь

$$N_{m+1}(A_0) = [\Lambda(A_0), \hbar_n = \mathrm{A}_n + \Lambda_n^i \mathrm{A}_i + \nu_n^\alpha \mathrm{A}_\alpha],$$

где $\Lambda_n^i \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{n-m-1}\Lambda_{\alpha\beta}^i \Lambda_n^{\beta\alpha},\ \nabla\Lambda_n^i + \omega_n^i \equiv 0.$

Аналогично, следуя работе [5] с учетом формул (1) — (5), находим фокальное многообразие $\Psi_m^{n-m-1}(N, L)$:

$$x^\alpha = 0, \det\left\|\delta_\beta^\alpha x^0 + (\nu_{n\beta}^\alpha - \Lambda_{\alpha\beta}^n \nu_n^\alpha \nu_n^\beta)x^n + (\Lambda_{i\beta}^\alpha - \nu_n^\alpha \Lambda_{i\beta}^n)x^i\right\| = 0, \tag{10}$$

полученное при смещениях точки A_0 вдоль кривых, принадлежащих L-подрасслоению. Линейная поляра точки A_0 относительно многообразия (10) есть плоскость

$$K_m(A_0):\ x^\alpha = 0, x^0 - \eta_i^0 x^i - \mu_n^0 x^n = 0, \tag{11}$$

где

$$\eta_i^0 = -\frac{1}{n-m-1}(\Lambda_{i\alpha}^\alpha - \Lambda_{i\alpha}^n \nu_n^\alpha),\ \mu_n^0 = -\frac{1}{n-m-1}(\nu_{n\alpha}^\alpha - \Lambda_{\alpha\beta}^n \nu_n^\alpha \nu_n^\beta),$$
$$\nabla\eta_i^0 + \omega_i^0 = \eta_{iK}^0 \omega^K,\ \nabla\mu_n^0 + \nu_n^\beta \omega_\beta^0 - \eta_i^0 \omega_n^i + \omega_n^0 = \mu_{nK}^0 \omega^K.$$

Плоскость $K_m(A_0)$ (11) пересекает:

а) плоскость $\Lambda(A_0)$ по ее нормали 2-го рода $N_{m-1}(A_0)$:

$$x^\alpha = 0,\ x^n = 0,\ x^0 - \eta_i^0 x^i = 0; \tag{12}$$

б) прямую $\mathfrak{h}(\nu) = [A_0, \mathfrak{h}_n(\nu)]$ в точке K_n^*:

$$K_n^*: \begin{cases} x^\alpha = \nu_n^\alpha x^n,\ x^i = \Lambda_n^i x^n, \\ x^0 = (\mu_n + \eta_i \Lambda_n^i)x^n. \end{cases} \tag{13}$$

Следует заметить, что плоскость $K_{n-m-1}(A_0)$ (7) является плоскостью Картана для образующего элемента Λ-подрасслоения, а плоскость $K_m(A_0)$ (11) — плоскостью Картана для образующего элемента L-подрасслоения, в данном центре A_0. Точки K_n, K_n^* соответсвенно назовем ν-*виртуальными точками Картана* прямых $I(\nu)$, $\mathfrak{h}(\nu)$.

§ 3. Соответствие Бомпьяни — Пантази

1. Плоскость $\Pi_{n-1}(A_0) = [N_{m-1}(A_0), N_{n-m-2}(A_0)]$, натянутую на нормали 2-го рода (8), (12) соответственно плоскостей $L(A)$ и $\Lambda(A)$, является ν-виртуальной плоскостью Нордена — Тимофеева неголономной композиции (Λ, L) [7]:

$$x^n = 0, x^0 - \eta_\sigma^0 x^\sigma = 0, \tag{14}$$

а плоскость $\Pi_{n-1}(A_0)$ (14) — нормаль второго рода H-плоскости в точке A_0. Введем в рассмотрение функции $t_\sigma \overset{\text{def}}{=} -\Lambda_{\sigma n}^n$, которые удовлетворяют уравнениям (при фиксации точки A_0):

$$\nabla_\delta t_\sigma + t_\sigma \pi_0^0 = -\Lambda_{\sigma\rho}^n \pi_n^\rho - \pi_\sigma^0. \tag{15}$$

Из выражения (15) следует, что совокупность функций $\{\Lambda_\sigma\}$ образует квазинормаль [5; 9] H-подрасслоения. Согласно работе [6] соответствие Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода H-подрасслоения имеет вид

$$\nu_\sigma^0 = -\Lambda_{\sigma\rho}^n \nu_n^\rho + t_\sigma^0. \tag{16}$$

Разрешив уравнения (16) относительно ν_n^σ получим

$$\nu_n^\sigma = -\Lambda_n^{\sigma\rho}\nu_\rho^0 + t_n^\sigma,$$

где

$$t_n^\sigma = \Lambda_n^{\sigma\rho} t_\rho,\ \nabla t_n^\sigma + \Lambda_n^{\sigma\rho}\omega_\rho^0 + \omega_n^\sigma = t_{nK}^\sigma \omega^K.$$

С помощью квазинормалей [9]

$$\tilde{t}_i = t_i - \Lambda_{i\alpha}^n \nu_n^\alpha,\ \nabla\tilde{t}_i + \tilde{t}_i\,\omega_0^0 = -\Lambda_{ij}^n \omega_n^j - \omega_i^0,$$

$$\tilde{t}_\alpha = t_\alpha - \Lambda_{\alpha i}^n \nu_n^i,\ \nabla\tilde{t}_\alpha + \tilde{t}_\alpha\omega_0^0 = -\Lambda_{\alpha\beta}^n\omega_n^\beta - \omega_\alpha^0$$

вводим в рассмотрение функции

$$\tilde{t}_n^i = \Lambda_n^{ij}\tilde{t}_j,\ \nabla\tilde{t}_n^i + \omega_n^i + \Lambda_n^{ij}\omega_j^0 \equiv 0,\ \ \tilde{t}_n^\alpha = \Lambda_n^{\alpha\beta}\tilde{t}_\beta,\ \nabla\tilde{t}_n^\alpha + \omega_n^\alpha + \Lambda_n^{\alpha\beta}\omega_\beta^0 \equiv 0$$

и затем устанавливаем:

а) биекцию Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода Λ-подрасслоения:

$$\nu_n^i = -\Lambda_n^{ij}\nu_j^0 + \tilde{t}_n^j,\ \nu_i^0 = -\Lambda_{ij}^n\nu_n^j + \tilde{t}_j^0;$$

б) биекцию Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода L-подрасслоения:

$$\nu_n^\alpha = -\Lambda_n^{\alpha\beta}\nu_\beta^0 + \tilde{t}_n^\alpha,\ \nu_\alpha^0 = -\Lambda_{\alpha\beta}^n\nu_n^\beta + \tilde{t}_\alpha^0.$$

Если охваты нормалей 1-го и 2-го рода Λ-, L-, H-подрасслоений представить как $\nu_n^\alpha = \Lambda_n^\alpha,\ \nu_n^i = \Lambda_n^i,\ \nu_n^\sigma = \Lambda_n^\sigma$, то охваты функций

$$\Lambda_i^0 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1}(\Lambda_{i\alpha}^\alpha - \Lambda_{i\alpha}^n\Lambda_n^\alpha),\ \Lambda_\alpha^0 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{m}(\Lambda_{\alpha i}^i - \Lambda_{\alpha i}^n\Lambda_n^i),\ \lambda_\sigma^0 \overset{\text{def}}{=} t_\sigma^0 - \Lambda_{\sigma\rho}^n\Lambda_n^\rho$$

определены в дифференциальной окрестности 1-го порядка, а охваты функций

$$K_n^0 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{m}(\Lambda_{ni}^i - \Lambda_{ij}^n\Lambda_n^i\Lambda_n^j),\ \mathsf{L}_n^0 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1}(\Lambda_{n\alpha}^\alpha - \Lambda_{\alpha\beta}^n\Lambda_n^\alpha\Lambda_n^\beta)\ -$$

в дифференциальной окрестности 2-го порядка.

Из выражения (16) следует, что $\lambda_\alpha^0 = -\Lambda_{\alpha\beta}^n\Lambda_n^\beta + t_\alpha^0,\ \lambda_i^0 = -\Lambda_{ij}^n\Lambda_n^j +\ t_j^0$.

В результате приходим к следующему предложению.

Теорема 2. *SH-распределение в дифференциальной окрестности 1-го порядка порождает внутренним инвариантным образом нормализацию Нордена — Тимофеева* $(\Lambda_n^\sigma, \lambda_\sigma^0)$ *H-подрасслоения и нормализации Нордена* $(\Lambda_n^i, \Lambda_i^0)$,

$(\Lambda_n^\alpha, \Lambda_\alpha^0)$ *соответственно* Λ- , L- *подрасслоений, а в дифференциальной окрестности 2-го порядка — поля* ν-*виртуальных точек Картана* $K_n = L_n + K_n^0 A_0$, $K_n^* = L_n + \mathrm{L}_n^0 A_0$ *и поля плоскостей Картана* $K_{n-m-1}(A_0) = [K_n^0, A_\alpha - \Lambda_\alpha^0 A_0]$, $K_n^*(A_0) = [K_n^*, A_i + \Lambda_i^0 A_0]$.

§ 4. Инвариантные оснащения основных структурных подрасслоений данного *SH*-распределения в смысле Э. Картана

1. Инвариантное оснащение Λ-подрасслоения данного *SH*-распределения в смысле Э. Картана

1. **Определение 2.** Λ-подрасслоение m-мерных линейных элементов данного *SH*-распределения назовем *оснащенным в смысле Э. Картана* [13], если каждому центру A_0 поставлена в соответствии плоскость $K_{n-m-1}(A_0)$, не имеющая общих точек с текущим элементом $\Lambda_m(A_0)$ базисного Λ-подрасслоения.

Плоскость $K_{n-m-1}(A_0)$ в каждом центре A_0 зададим точками

$$K_\alpha(\nu) = \nu_\alpha^0 A_0 + A_\alpha, \; K_n(\nu) = \nu_n^0 A_0 + \nu_n^\alpha A_\alpha + \nu_n^i A_i + A_n = \nu_n^0 A_0 + N_n.$$

Функции, входящие в эти соотношения, удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered} \nabla\nu_n^0 + \nu_n^i\omega_i^0 + \nu_n^\alpha\omega_\alpha^0 + \omega_n^0 = \nu_{nK}^0\omega^K, \; \nabla\nu_n^i + \omega_n^i = \nu_{nK}^i\omega^K, \\ \nabla\nu_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \nu_{nK}^\alpha\omega^K, \; \nabla\tilde{\nu}_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = \tilde{\nu}_{\alpha K}^0\omega^K, \end{gathered} \tag{17}$$

задающим условие инвариантности плоскости Картана $K_{n-m-1}(A_0) = [K_\alpha, K_n]$.

В дальнейшем, если специально не оговорено, в качестве функций $\nu_n^\alpha, \tilde{\nu}_\alpha^0$ берем соответственно охваты

$$\nu_n^\alpha = \Lambda_n^\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m}\Lambda_{ij}^\alpha\Lambda_n^{ji}, \; \tilde{\nu}_\alpha^0 = -\frac{1}{m}(\Lambda_{\alpha i}^i - \Lambda_{\alpha i}^n\nu_n^i),$$

если $\nu_n^i \overset{\text{def}}{=} \Lambda_n^i$, то $\tilde{\nu}_\alpha^0 \equiv \Lambda_\alpha^0$. Таким образом, оснащение Λ-подрасслоения данного *SH*-распределения в смысле Э. Картана равносильно заданию на подмногообразии *SH* полей геометрических объектов $\{\nu_n^i\}$, $\{\tilde{\nu}_\alpha^0\}$, $\{\nu_n^i, \nu_n^0, \Lambda_n^\alpha\}$. Заметим, что плоскость $K_{n-m-1}(A_0)$ пересекает $L_{n-m-1}(A_0)$ по плоскости

$$K_{n-m-2}(A_0) = L_{n-m-1}(A_0) \cap K_{n-m-1}(A_0) = [\,K_\alpha\,] = [\,A_\alpha + \tilde{\nu}_\alpha^0 A_0\,],$$

и если $\Lambda_{i\alpha}^n \equiv 0$, то плоскость $K_{n-m-2}(A_0)$ является осью плоскости Кёнигса [6]. В силу этого плоскость $K_{n-m-2}(A_0) = [K_\alpha]$ назовем *осью оснащающей плоскости* $K_{n-m-1}(A_0) = [K_\alpha, K_n]$. Ясно, что оснащение Λ-подрасслоения в смысле Э. Картана влечет за собой оснащение Λ-подрасслоения полем нормалей 1-го рода $\{\nu_n^i\}$. Верно и обратное утверждение: если на Λ-подрасслоении задано поле нормалей 1-го рода $\{\nu_n^i\}$. то такое оснащение определяет оснащение в смысле Э. Картана Λ-подрасслоения, так как в качестве одного из возможных охватов функции ν_n^0 можно взять

$$\tilde{\nu}_n^0 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{m}(\nu_{ni}^i - \Lambda_{kj}^n \nu_n^k \nu_n^j) - \tilde{\nu}_\alpha^0 \Lambda_n^\alpha \tag{18}$$

или

$$\tilde{K}_n^0 = -\frac{1}{m}(\nu_{ni}^i - \Lambda_{kj}^n \nu_n^k \nu_n^j) - \lambda_\alpha^0 \Lambda_n^\alpha. \tag{19}$$

При таком охвате (18), (19) функции ν_n^0 оснащающая плоскость $K_{n-m-1}(A_0)$ называется *плоскостью Кёнигса нормали* $\{\nu_n^i\}$ [13]. Охват (19) универсален в том смысле, что он справедлив для любого поля нормалей 1-го рода $\{\nu_n^i\}$. Из охвата (19) функции ν_n^0 следует

Теорема 3. *В каждом центре A_0 SH-распределения инвариантные оснащающие плоскости Кёнигса* (13) *всех нормалей 1-го рода $N_{n-m}(\nu)$ Λ-подрасслоения принадлежат одной связке, $(n-m-2)$-мерная вершина* $K_{n-m-2} = [A_\alpha + \lambda_\alpha^0 A_0]$ которой является осью каждой из плоскостей Кёнигса.

2. Пусть Λ-подрасслоение оснащено полями нормалей $\{\nu_n^i\}$ 1-го рода. Следуя работе А. В. Столярова [11], найдем условия неподвижности плоскости Э. Картана $K_{n-m-1}(A_0) = [K_\alpha, K_n]$. Разложив dK_α, dK_n по реперу $\{A_0, A_j, K_\beta, K_n\}$ и приравняв коэффициенты при A_0, A_j к нулю, находим:

$$\nu_{nK}^0 - \tilde{\nu}_\alpha^0(\Lambda_{nK}^\alpha + \nu_n^0\delta_K^\alpha + \nu_n^j\Lambda_{jK}^\alpha) - (\nu_n^0 - \tilde{\nu}_\alpha^0\Lambda_n^\alpha)(\Lambda_n^\beta\Lambda_{\beta K}^n + \nu_n^0\delta_K^n + \nu_n^j\Lambda_{jK}^n) = 0, \tag{20}$$

$$\tilde{\nu}_{\alpha K}^0 - \tilde{\nu}_\alpha^0\tilde{\nu}_\beta^0\delta_K^\beta - (\nu_n^0 - \tilde{\nu}_\beta^0\Lambda_n^\beta)(\Lambda_{\alpha K}^n + \tilde{\nu}_\alpha^0\delta_K^n) = 0, \tag{21}$$

$$\nu_{nK}^i + \nu_n^0\delta_K^i + \Lambda_n^\alpha\Lambda_{\alpha K}^i - \nu_n^i(\nu_n^0\delta_K^n + \nu_n^j\Lambda_{jK}^n + \Lambda_n^\beta\Lambda_{\beta K}^n) = 0, \tag{22}$$

$$\Lambda_{\alpha K}^i + \tilde{\nu}_\alpha^0\delta_K^i - \nu_n^i(\tilde{\nu}_\alpha^0\delta_K^n + \Lambda_{\alpha K}^n) = 0. \tag{23}$$

Одновременное выполнение соотношений (22), (23) является условием того, что смещение оснащающей плоскости $K_{n-m-1}(\nu)$ не выходит из нормали 1-го рода $N_{n-m}(\nu_n^i)$. При этом оснащающая плоскость $K_{n-m-1}(\nu)$ является плоскостью Кёнигса [5] нормали $\{\nu_n^i\}$, так как из соотношений (23), (22) непосредственно следует:

$$\begin{cases} \tilde{\nu}_\alpha^0 = -\dfrac{1}{m}(\Lambda_{\alpha i}^i - \Lambda_{\alpha j}^n \nu_n^j), \\ \tilde{\nu}_n^0 = -\dfrac{1}{m}(\nu_{ni}^i - \Lambda_{kj}^n \nu_n^k \nu_n^j) - \tilde{\nu}_\alpha^0 \Lambda_n^\alpha. \end{cases}$$

В работе [9] доказано, что при $m \geqslant 2$ для гиперполосных распределений из соотношений (22), (23) вытекают соотношения (20), (21). Так же можно показать, что для Λ-подрасслоения данного *SH*-распределения условий (22), (23) достаточно, чтобы восстановить (20), (21). В случае $m \geqslant 2$ аналогично доказываем, что при любом смещении центра A_0

SH-распределения смещение оснащающей плоскости Э. Картана K_{n-m-1} не выходит из нормали 1-го рода $\{\nu_n^i\}$ тогда и только тогда, когда оснащающая плоскость K_{n-m-1} неподвижна. В этом случае плоскость K_{n-m-1} — это плоскость Кёнигса [9] нормали $\{\nu_n^i\}$.

2. Инвариантное оснащение L-подрасслоения в смысле Картана

1. Пусть теперь задано поле нормалей 1-го рода $\{\nu_n^\alpha\}$ L-подрасслоения. Тогда поле квазитензора

$$\tilde{\nu}_i^0 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1}(\Lambda_{i\alpha}^\alpha - \Lambda_{i\alpha}^n \nu_n^\alpha),$$

заданное уравнениями

$$\nabla\tilde{\nu}_i^0 + \omega_i^0 = \tilde{\nu}_{iK}\omega^K,$$

определяет поле нормалей 2-го рода L-подрасслоения.

Определение 3. *L-подрасслоение $(n-m-1)$-мерных плоскостей данного SH-распределения назовем оснащенным в смысле Картана* [13], *если каждому центру A_0 поставлена в соответствие плоскость $K_m(A_0)$, не имеющая общих точек с текущим элементом $L(A_0)$ базисного L-подрасслоения.*

В плоскости нормали $N_{m+1}(\nu)$ найдем ивариантную плоскость $K_m(\nu) = [C_i, C_n]$, натянутую на точки

$$C_n(\nu) = \eta_n^0 A_0 + \hbar_n(\nu) = A_n + \nu_n^\alpha A_\alpha + \Lambda_n^i A_i + \eta_n^0 A_0,\ C_i(\nu) = A_i + \tilde{\nu}_i^0 A_0.$$

Согласно (1), (16), (17) находим условия инвариантности плоскости $K_m(\nu) = [C_i, C_n]$:

$$\begin{cases} \nabla\eta_n^0 + \Lambda_n^i\omega_i^0 + \nu_n^\alpha\omega_\alpha^0 + \omega_n^0 = \eta_{nK}^0\omega^K,\ \nabla\Lambda_n^i + \omega_n^i = \Lambda_{nK}^i\omega^K, \\ \nabla\nu_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \nu_{nK}^\alpha\omega^K,\ \nabla\tilde{\nu}_i^0 + \omega_i^0 = \tilde{\nu}_{iK}^0\omega^K. \end{cases} \tag{24}$$

Таким образом, оснащение L-подрасслоения данного SH-распределения в смысле Э. Картана равносильно заданию на подмногоообразии SH полей геометрических объектов $\{\nu_n^\alpha\}$, $\{\tilde{\nu}_i^0\}$, $\{\nu_n^\alpha, \eta_n^0, \Lambda_n^i\}$ (26). Отметим, что плоскость $K_m(\nu)$ пересекает плоскость $\Lambda_m(A_0)$ по плоскости

$$K_{m-1}(A_0) : K_m(A_0) \cap \Lambda_m(A_0) = [C_i(\nu)] = [A_i + \tilde{\nu}_i^0 A_0],$$

которую будем называть *осью плоскости* K_m Э. Картана. Ясно, что если $\Lambda_{i\alpha}^n = 0,$ то плоскость $K_{m-1}(A_0)$ является осью плоскостей Кенигса [5] в этом случае:

$$\tilde{\nu}_i^0 = \Lambda_i^0 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1}\Lambda_{i\alpha}^\alpha,\ C_i = A_i + \Lambda_i^0 A_0.$$

Оснащение L-подрасслоения в смысле Э. Картана полем плоскостей $K_m(\nu)$ влечет за собой оснащение L-подрасслоения полем нормалей 1-го рода $\{\nu_n^\alpha\}$. Верно и обратное утверждение: если на L-подрасслоении задано поле нормалей 1-го рода $\{\nu_n^\alpha\}$, то такое оснащение определяет оснащение в смысле Э. Картана L-подрасслоения, так как в качестве одного из возможных охватов функции η_n^0 можно взять

$$\tilde{\eta}_n^0 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1}(\nu_{n\alpha}^\alpha - \Lambda_{\gamma\beta}^n \nu_n^\gamma \nu_n^\beta) - \tilde{\nu}_i^0 \Lambda_n^i \tag{25}$$

или

$$\tilde{C}_n^0 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1}(\nu_{n\alpha}^\alpha - \Lambda_{\gamma\beta}^n \nu_n^\gamma \nu_n^\beta) - \lambda_i^0 \Lambda_n^i. \tag{26}$$

При охвате (25), (26) функции η_n^0 оснащающая плоскость $K_m(A_0)$ [9] является плоскостью Кёнигса нормали $\{\nu_n^\alpha\}$. Охват (26) универсален в том смысле, что он справедлив для любого поля нормалей $\{\nu_n^\alpha\}$ 1-го рода L-подрасслоения в данном центре A_0.

2. Пусть L-подрасслоение оснащено полем нормалей $\{\nu_n^\alpha\}$ 1-го рода. Аналогично (см п. I) найдем условия неподвижности плоскости Э. Картана $K_m(\nu) = [C_i, C_n]$. Разложив dC_n, dC_i по реперу $\{A_0, A_\alpha, C_i, C_n\}$ и приравняв коэффициенты при A_0 и A_α к нулю, находим:

$$\eta_{nK}^0 - \tilde{\nu}_i^0(\Lambda_{nK}^i + \eta_n^0 \delta_K^i + \nu_n^\beta \Lambda_{\beta K}^i) - (\eta_n^0 - \tilde{\nu}_i^0 \Lambda_n^i)(\Lambda_n^i \Lambda_{iK}^n + \eta_n^0 \delta_K^n + \nu_n^\beta \Lambda_{\beta K}^n) = 0, \tag{27}$$

$$\tilde{\nu}_{iK}^0 - \tilde{\nu}_i^0 \tilde{\nu}_j^0 \delta_K^j - (\eta_n^0 - \tilde{\nu}_j^0 \Lambda_n^j)(\Lambda_{iK}^n + \tilde{\nu}_i^0 \delta_K^n) = 0, \tag{28}$$

$$\nu_{nK}^\alpha + \eta_n^0 \delta_K^\alpha + \Lambda_n^i \Lambda_{iK}^\alpha - \nu_n^\alpha(\eta_n^0 \delta_K^n + \nu_n^\beta \Lambda_{\beta K}^n + \Lambda_n^j \Lambda_{jK}^n) = 0, \tag{29}$$

$$\Lambda_{iK}^\alpha + \tilde{\nu}_i^0 \delta_K^\alpha - \nu_n^\alpha(\tilde{\nu}_i^0 \delta_K^n + \Lambda_{iK}^n) = 0. \tag{30}$$

Следуя работе [11], можно показать, что условия (33), (34) — следствия (29), (30), а при $n-m-1 \geqslant 2$ условий (29), (30) достаточно, чтобы плоскость Э. Картана $K_m(A_0)$ была неподвижной. В этом случае плоскость $K_m(A_0)$ является плоскостью Кёнигса [9], так как из (29), (30) следует, что

$$\tilde{\nu}_i^0 = -\frac{1}{n-m-1}(\Lambda_{i\alpha}^\alpha - \Lambda_{i\alpha}^n \nu_n^\alpha),\ \tilde{\eta}_n^0 = -\frac{1}{n-m-1}(\nu_{n\alpha}^\alpha - \Lambda_{\gamma\beta}^n \nu_n^\gamma \nu_n^\beta) - \tilde{\nu}_i^0 \Lambda_n^i.$$

Для инвариантных оснащений в смысле Картана L-подрасслоения имеет место теорема, аналогичная теореме 3.

Теорема 4. *В каждом центре A_0 SH-распределения инвариантные оснащающие плоскости Кёнигса* (9) *всех нормалей 1-го рода $N_{m+1}(\nu)$ L-подрасслоения принадлежат одной связке, $(m-1)$-мерная вершина $K_{m-1} = [A_i + \lambda_i^0 A_0]$ которой является осью каждой из плоскостей Кёнигса $K_m(A_0)$.*

Резюмируя, приходим к следующим предложениям.

Теорема 5. *При $m \geqslant 2$ при любом смещении центра A_0 SH-распределения в дифференциальной окрестности 1-го порядка оснащающая плоскость Э. Картана $K_{n-m-1} = [K_\alpha(\nu), K_n(\nu)]$ (является плоскостью Кёнигса) не выходит* *из нормали 1-го рода* $\{\nu_n^i\}$ Λ*-подрасслоения тогда и только тогда, когда она неподвижна. Условия* (22), (23) — *аналитический признак неподвижности плоскости Кёнигса* K_{n-m-1}.

Теорема 6. *При* $n-m-1 \geqslant 2$ *при любом смещении центра* A_0 *SH-распределения в дифференциальной окрестности 1-го порядка оснащающая плоскость Э. Картана* $K_m(\nu) = [C_i, C_n]$ *(плоскость Кёнигса) не выходит из нормали 1-го рода* $\{\nu_n^\beta\}$ *L-подрасслоения тогда и только тогда, когда она неподвижна. Условия* (26), (27) — *аналитический признак того, что «вращаясь» вокруг своей оси* $K_{n-m-2} = [A_0 + \lambda_i^0 A_0]$, *плоскость* K_m *остается неподвижной.*

Список литературы

1. *Будылкин А. А.* Инвариантные нормализации скомпонованного гиперплоскостного распределения проективного пространства // Естественные и математические науки в современном мире. 2015. Вып. № 2(26). С. 24—33
2. *Вагнер В. В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1950. Вып. 8. С. 197—272.
3. *Гохман А. В.* Дифференциальная геометрия и классическая динамика систем // Тр. геометр. семинара ВИНИТИ. 1966. Т. 1. С. 111—138.
4. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциальнно-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.
5. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геометр. семинара ВИНИТИ. 1971. Т. 3. С. 49—94.
6. *Остиану Н. М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространсве // Там же. 1973. Т. 4. С. 71—119.
7. *Попов Ю. И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. СПб., 1992.
8. *Попов Ю. И., Столяров А. В.* Специальные классы регулярных гиперполос проективного пространство. Калининград, 2011.
9. *Столяров А. В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.
10. *Столяров А. В.* Дифференциальная геометрия полос // Проблемы геометрии ВИНИТИ. 1978. Т. 10. С. 25—54.
11. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.
12. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М., 1948.
13. *Cartan E.* Les espaces a connexion projective // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу МГУ. М., 1977. Вып. 4. С. 147—159.

Об авторе

Андрей Александрович Будылкин — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: AndreyBudylkin@rambler.ru

About the author

Andrey Budylkin — PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: AndreyBudylkin@rambler.ru